Lycée H.P. Manouba 4ème Math Année scolaire : 2008-2009	Epreuve de : Mathématiques — Proposé par : Mr BEN ALI **DEVOIR DE CONTROLE N°1** Date : Vendredi 05/11/2007 — Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (5 pts)

1)Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=3x+2\sin x$

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$; $3x-2\le g(x)\le 3x+2$.

b)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{g(x)} & \text{si } x>0\\ x^3-3x+\dfrac{1}{5} & \text{si } x\le 0\end{cases}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que pour tout $x>\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{x}{3x+2}\le f(x)\le \dfrac{x}{3x-2}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interprète géométriquement le résultat

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans $]-2,-1[$.

Exercice n°2 : (6 pts)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-u_n+2}{1+u_n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; $1<u_n\le 2$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite .

2) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0<u_{n+1}-1\le\dfrac{1}{3}(u_n-1)$.

b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0<u_n-1\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

3) On pose : $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $n<S_n\le n+\dfrac{1}{2}(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$

Exercice n°3 : (5 pts)

Soit $\theta\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$ on pose $P(z)=2z^3-(3+2i\sin 2\theta)z^2+(1+2i\sin 2\theta)z-\dfrac{1}{2}i\sin 2\theta$.

1) a- Calculer $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire le nombre complexe b vérifiant $P(z)=\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\left(2z^2+bz+i\sin 2\theta\right)$.

b- Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$ .On note z_0 la solution réel et z_1 et z_2 les autre solutions .

c-Mettre z_1 et z_2 sous-forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ on considère les points A , M_1 et M_2

d'affixes respectifs $z_0 = \frac{1}{2}$; $z_1 = \frac{1+e^{i2\theta}}{2}$ et $z_2 = \frac{1-e^{-i2\theta}}{2}$

a- Montrer que, pour tout $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, le triangle AM_1M_2 est isocèle en A.

b- Pour quelle valeur de θ le triangle AM_1M_2 est équilatéral .

c- Quel est l'ensemble des point M_1 lorsque θ varie dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice n°4 : (4 pts)

1) *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

a- Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que si $a \equiv b$ mod (7) et $c \equiv d$ mod (7) alors $ac \equiv bd$ mod (7).

b- En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls

si $a \equiv b$ mod (7) alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n$ mod (7).

2) Pour a =2 puis pour a = 3, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1$ mod(7).

3) Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a- Montrer que : $a^6 \equiv 1$ mod(7).

b- On appelle *ordre* de a mod (7), et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ mod(7).

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1$ mod7.

c-En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?

d- Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4) À tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2008} \equiv 6$ mod (7).

FIN.